4.6.1 Teorema de Rolle y Teorema del Valor Medio

En la fig. 4.9 se puede apreciar la gráfica de una función que es contínua en el intervalo cerrado $[a, b]$, $f(a) = f(b) = 0$ y además $f'(x)$ existe (no tiene picos) en todos los puntos del intervalo (a, b).

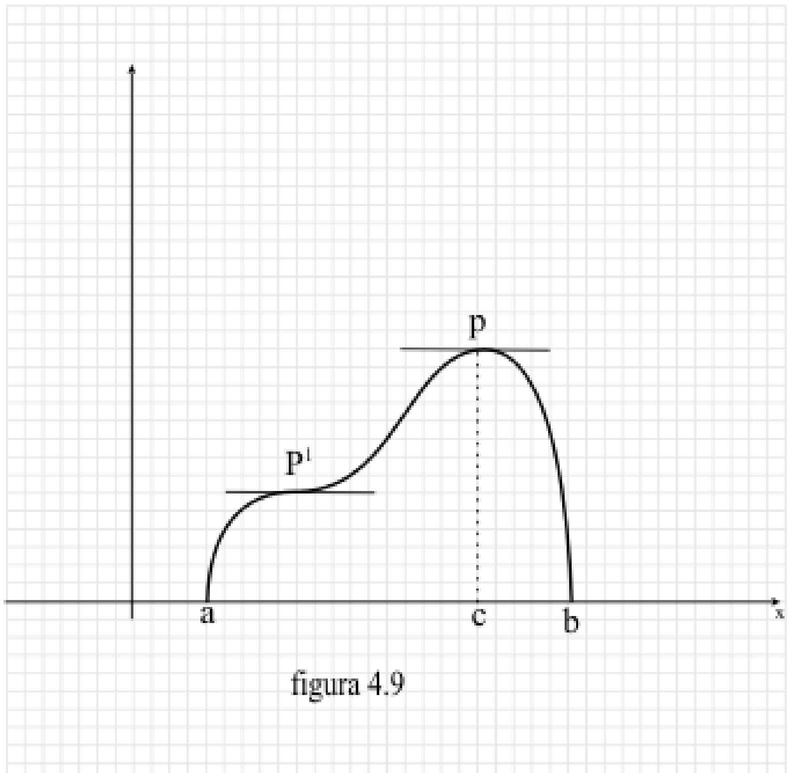


figura 4.9

fig. 4.9

Intuitivamente, puede verse que existe por lo menos un punto P de la curva, de abscisa c entre a y b, en el cual la recta tangente a la curva es horizontal (paralela el eje x).

Este resultado se establece con toda generalidad en el llamado **Teorema de Rolle** que se enuncia sin demostración.

TEOREMA 1 (TEOREMA DE ROLLE)

Sea f una función de variable real que satisface las siguientes propiedades:

i. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
ii. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

iii. $f(a) = f(b) = 0$.

Entonces, existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que: $f'(c) = 0$.

El siguiente teorema que se enuncia y se demuestra a continuación, es una generalización del teorema de Rolle y se conoce con el nombre del teorema del valor medio para derivadas.

TEOREMA 2 (T.V.M.)

Sea f una función de variable real que satisface las siguientes propiedades:

i. f es contínua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
ii. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces, existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que: $\boxed{f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}}$

Antes de ver la demostración del teorema, analice su significado geométrico.

En la fig. 4.10 se muestra la gráfica de una función que satisface las hipótesis del T.V.M.

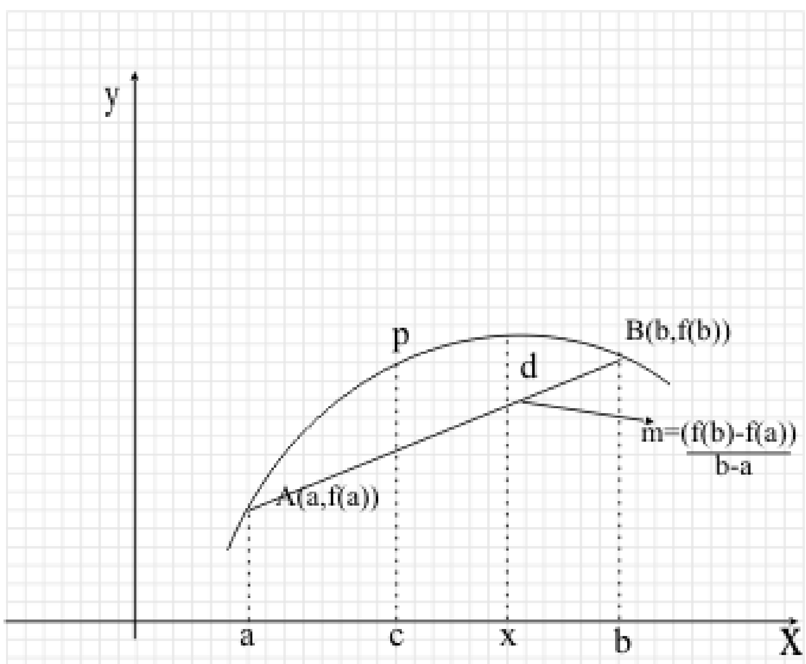


fig4.10

fig. 4.10

El término $\left[f(b) - f(a)\right] \,/\, (b - a)$ es la pendiente de la recta secante a la curva que pasa por los puntos A y B. De esta forma, se puede interpretar geométricamente el teorema así: Existe un punto P sobre la curva de abscisa c, $c \in (a, b)$ tal que la recta tangente a la curva en P cuya pendiente es $f'(c)$, es paralela a la recta secante $\overline{AB}$.

Demostración:

Usando la forma: **dos – puntos** de la ecuación de la recta, se deduce para la recta secante, la ecuación:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

De donde,
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Defínase ahora la función *F (x)* como la función distancia vertical entre cada punto *(x, f(x))* sobre la curva y el correspondiente (*x, y*) sobre la secante $\overline{AB}$ (segmento d. de la fig. 9.12.) .

Asi que:

$$F(x) = f(x) - y$$

$$= f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Esto es,
$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad (1)$$

La función *F (x)* así definida satisface las hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo [*a, b*]. En efecto:

i. *F (x)* es contínua en el intervalo cerrado [*a, b*]. (por qué?)

ii. *F (x)* es derivable en el intervalo abierto (*a, b*). (por qué?)

Además,
$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad (2)$$

iii. Finalmente, $F(a) = f(a) - f(a) - \dfrac{[f(b) - f(a)]}{b - a}(a - a) = 0$

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{[f(b) - f(a)]}{b - a}(b - a) = 0$$

En consecuencia, de acuerdo con el teorema de Rolle, existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que $F'(c) = 0$.

Pero, de acuerdo con (2) $F'(c) = f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Luego, $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, que era lo que se quería demostrar.

Ejemplo 1.

Analizar si $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ satisface las hipótesis del T.V.M. para derivadas en el intervalo $[1,3]$ y en caso afirmativo, determine el valor(es) de C que satisface la conclusión.

Solución:

i. $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ es contínua en $[1,3]$ ¿Por qué?
ii. $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3 \Rightarrow f$ es derivable en $(1,3)$ ¿Por qué?

Como f cumple la hipótesis del T.V.M., entonces, existe por lo menos un C, $C \in (1,3)$ tal que:

$$f'(C) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Pero, $f'(C) = 3C^2 - 10C - 3;$ $f(3) = 3^3 - 5.3^2 - 3.3 = -27;$ $f(1) = 1 - 5 - 3 = -7$

Asi que: $$3C^2 - 10C - 3 = \frac{-27 - (-7)}{3 - 1} = -10$$

Por lo tanto, $3C^2 - 10C + 7 = 0 \Leftrightarrow (3C - 7)(C - 1) = 0$

De donde, $C = 7/3$, $C = 1$

De estos dos valores, el único que pertenece al intervalo $(1, 3)$ es $C = 7/3$, que es la única solución.

Ejemplo 2.

Para la función $f(x) = x^{2/3}$, estudiar las condiciones del T.V.M. para derivadas en el intervalo $[-2,2]$.

Solución:

i. Claramente la función es continua en [-2, 2].

ii. $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$. f' no existe en el punto $x = 0$.

Luego, no se cumple la condición ii. del teorema, y en consecuencia, no puede garantizarse la existencia del punto C.

Ahora, $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4} = 0$ y como $f'(x) = \frac{2}{3x^{1/3}}$ no se anula para ningún valor real de x, entonces la igualdad: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ no se cumplirá en ningún C en (-2, 2).

Ejemplo 3.

a. Demostrar que si la derivada de una función es 0 en un intervalo, entonces, la función es constante en dicho intervalo.

b. Use la parte a. para demostrar que: $f(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$ es constante. Hállese el valor de dicha constante.

Solución:

Note en primer lugar que f satisface las hipótesis del T.V.M. (Por qué?).

Ahora, sean x_1, x_2 **dos puntos cualesquiera** del intervalo $[a, b]$ y sea f la función.

Para probar la parte a. es suficiente probar que $f(x_1) = f(x_2)$, lo cual obliga a que la función sea constante.

Según el T.V.M., existe un número c entre x_1 y x_2 tal que:

$f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ y como $f'(c) = 0$, se concluye entonces que $f(x_2) = f(x_1)$.

b. $f'(x) = 2\sec x \cdot (\sec x \cdot \tan x) - 2\tan x(\sec^2 x)$

$f'(x) = 2\sec^2 x \cdot \tan x - 2\sec^2 x \cdot \tan x = 0$.

Como $f'(x) = 0$, se sigue de la parte a. que $f(x)$ es una función constante.

Para hallar el valor de la constante, basta evaluar la función en algún número específico, el cual se puede elegir arbitrariamente; por ejemplo, $x = \pi / 3$.

Se tiene entonces, $f(\pi/3) = \left(\sec\dfrac{\pi}{3}\right)^2 - \left(\tan\dfrac{\pi}{3}\right)^2 = 2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 1$.

Luego, $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$ para todo x. (x en el dominio común de la secante y la tangente).

Este resultado no debe sorprender puesto que $1 + \tan^2 x \equiv \sec^2 x$, es una identidad trigonométrica conocida.

Como aplicación inmediata del T.V.M., se prueba otro teorema que permite determinar los intervalos donde crece y decrece una curva conociendo el signo de su primera derivada.

TEOREMA 3 (CRITERIO PARA CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO)

Sea f una función de variable real contínua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).

i. Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f **es creciente en** $[a, b]$.

ii. Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$ entonces f **es decreciente en** $[a, b]$.

Demostración:

i. Sean x_1, x_2 dos puntos de $[a, b]$ tales que $x_1 < x_2$.

Evidentemente, f es continua en $[x_1, x_2]$, f es derivable en (x_1, x_2), luego por el T.V.M., existe por lo menos un punto $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \qquad (1)$$

De $x_1 < x_2$, se deduce que $x_2 - x_1 > 0$ y como por hipótesis $f'(c) > 0$, se deduce de (1) que:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) > 0$$

Luego, $f(x_2) > f(x_1)$ y f es creciente en $[a, b]$.

ii. Se demuestra de manera similar.

Observación:

El crecimiento y el decrecimiento de una curva coinciden con el signo de la primera derivada. Asi:

Donde $f'(x) > 0$ (derivada positiva), *f(x)* es creciente.
$f'(x) < 0$ (derivada negativa), *f(x)* es decreciente.

El siguiente teorema, permite clasificar los extremos relativos (máximos y mínimos) de una función, de acuerdo a las variaciones de signo de la primera derivada.

TEOREMA 4 (CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS)

Sea f una función contínua en un intervalo I; sean a, b, c puntos de I, tales que $a < c < b$ y c un punto crítico de f ($f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe).

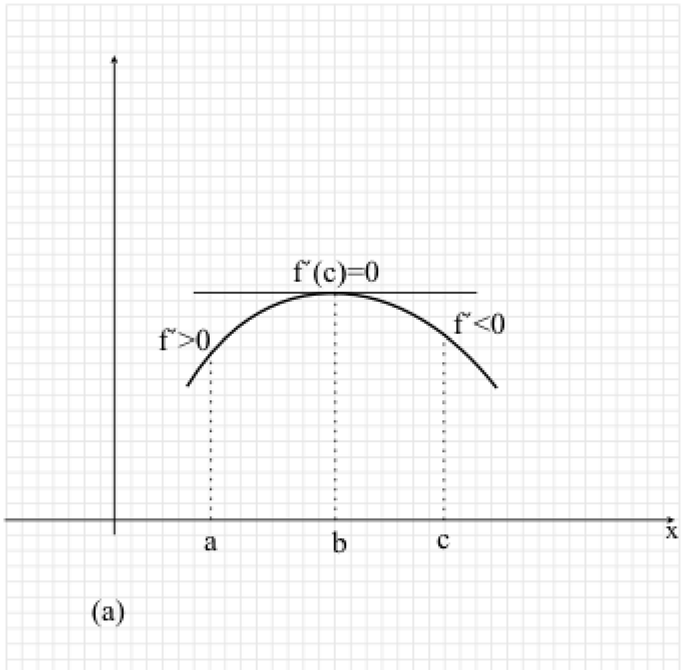
Entonces:

i. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para todo x en (c, b), entonces, ***f(c)*** **es un máximo relativo.** (fig. 4.11 (a), fig. 4.11 (b)).

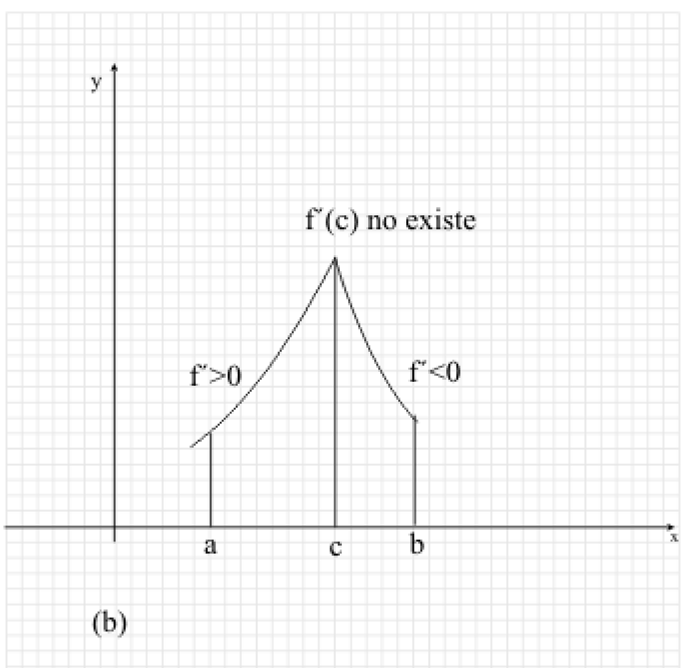
ii. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para todo x en (c, b), entonces, ***f(c)*** **es un mínimo relativo.** (fig. 4.11 (d), fig. 4.11 (e)).

iii. Si $f'(x) > 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) > 0$ para todo x en (c, b), entonces, ***f(c)*** **no es un extremo relativo.** (fig. 4.11 (c)).

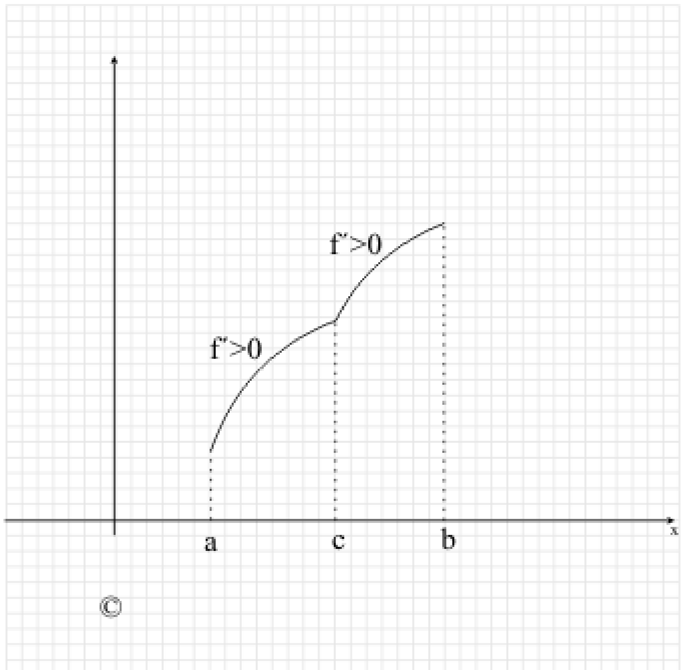
iv. Si $f'(x) < 0$ para todo x en (a, c) y $f'(x) < 0$ para todo x en (c, b), entonces, ***f(c)*** **no es un extremo relativo.** (fig. 4.11 (f)).



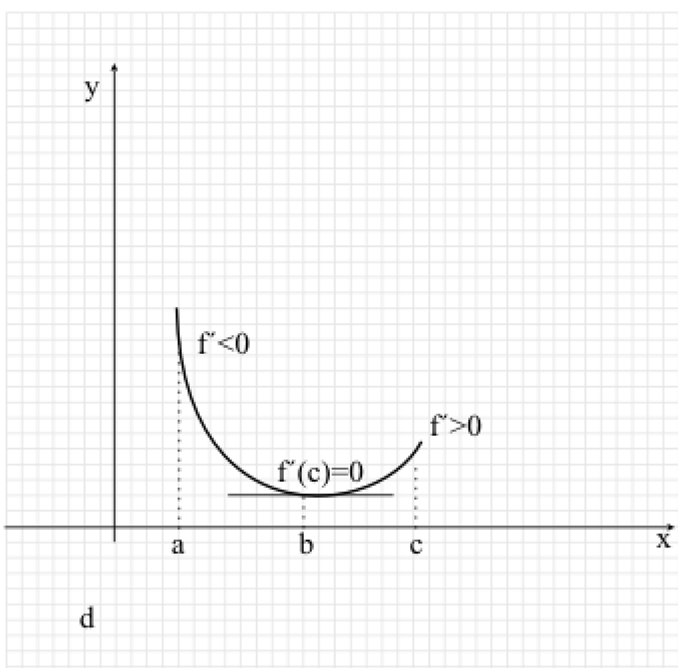
(a)



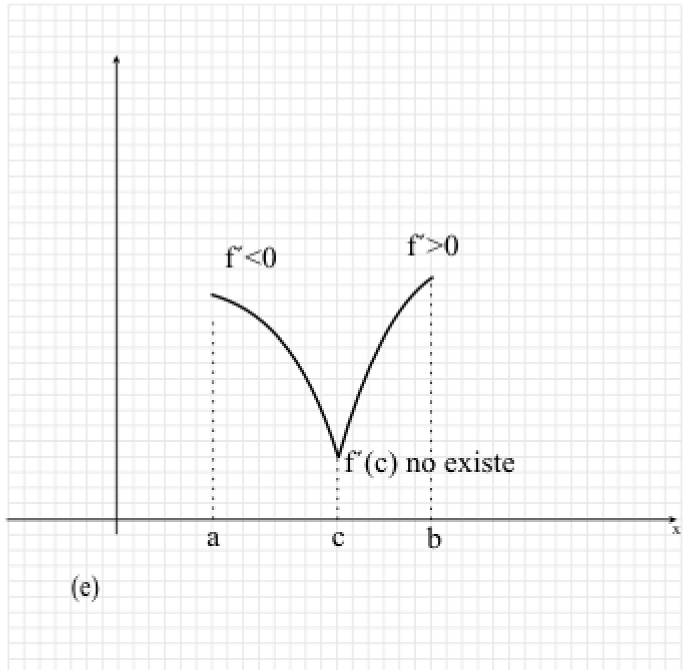
(b)



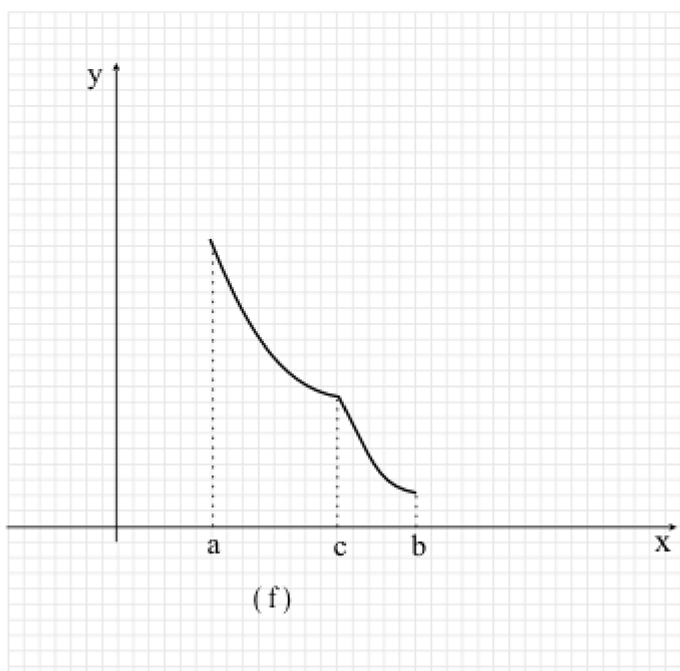
(c)



(d)



(e)



(f)

Fig. 4.11

Demostración:

i. Si $f'(x) > 0$ en (a, c), se tiene por el **Teorema 5** que f es creciente, luego para todo x tal que $a < x < c$, se tiene:

$$f(x) < f(c) \qquad (1)$$

Ahora, como $f'(x) < 0$ en (c, b), entonces f es decreciente (Teorema 5) y de esta forma, para todo x tal que $c < x < b$, se cumple:

$$f(c) > f(x) \qquad (2)$$

De (1) y (2) se concluye que $f(c)$ es un máximo relativo.

ii. Similar a la parte i.

iii. Si $f'(x) > 0$ en (a, c) y $f'(x) > 0$ en (c, b), entonces por el **Teorema 5** se tiene que $f(x) < f(c)$ para todo x en (a, c) y $f(c) < f(x)$ para todo x en (c, b); de lo cual se concluye que $f(c)$ no puede ser ni máximo ni mínimo relativo.

iv. Similar a la parte iii.

Observación:

En el lenguaje corriente, las partes i. y ii. del teorema 4, se expresan respectivamente, en la siguiente forma:

Si la derivada pasa de **positiva** a **negativa**, entonces, el punto crítico corresponde a un **máximo relativo**; y si la derivada pasa de **negativa** a **positiva**, el punto crítico corresponde a un **mínimo relativo**.

En los ejercicios resueltos 21, 22 y 23 de la sección 4.4 del texto de Stewart se ilustra como determinar para la gráfica de una función dada los intervalos donde crece y donde decrece la curva, así como también los extremos relativos.

Para ello se explica el método gráfico que es mucho mas expedito que el método analítico.

Ejemplo.

Considere la curva cuya ecuación viene dada por

$$y = f(x) = x^4 - 2x + 3$$

Se tiene, entonces, $f'(x) = 4x^3 - 4x$

$$= 4x(x-1)(x+1)$$

El signo de $f'(x)$ depende de los signos de sus factores $4x$, $(x-1)$ y $(x+1)$.

Signo de $4x$	- - - - - - - - - - - - - - - - -	0	+++++++++++++++++++	
Signo de $(x-1)$	- -	1	++++++++++++++	
Signo de $(x+1)$	- - - - - - - - - - - -	- 1	+++++++++++++++++++++++++	
Signo de $f'(x)$	- - - - - - - - - - - -	- 1	+++++	0

Signo de $f'(x)$	- - - - - - - - - - - -	- 1	+++++	0	- - - -	1	++++++++++++++

De esta forma:

f decrece en los intervalos $(-\infty,-1)$ y $(0,1)$.
f crece en los intervalos $(-1,0)$ y $(1,+\infty)$.

$x=-1$ corresponde a un mínimo relativo. $P_m(-1,2)$
$x=0$ corresponde a un máximo relativo. $P_m(0,3)$
$x=1$ corresponde a un mínimo relativo. $P_m(1,2)$