

### 1.4.1 Ejercicios resueltos sobre funciones trigonométricas

1. Se le sugiere al estudiante mirar con detenimiento los ejemplos resueltos: 3, 4, 5, 6, 7 y 8 del apéndice C del texto guía: Cálculo de Stewart.
2. Graficación de la suma de dos funciones: En el mismo sistema de coordenadas, trácese la gráfica de:

$$h(x) = x + \text{sen } x$$

#### Solución

Para hacer la gráfica de la suma de dos o más funciones, se utiliza el método de **suma de ordenadas** y que para el caso se describe a continuación.

En primer lugar, se trazan las gráficas de las funciones componentes:

$$y = h_1(x) = x \quad \text{e} \quad y = h_2(x) = \text{sen } x$$

en el mismo sistema de coordenadas (ver fig. 5 (a))

fig. 5

Luego se eligen diversos valores de  $x$ ; por ejemplo:  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 2\pi$  y para ellos se calcula:  $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$ .

La tabla adjunta muestra estos cálculos.

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
-----	---	-----------------	-------	------------------	--------

$y = h_1(x) = x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$y = h_2(x) = \text{sen } x$	0	1	0	-1	0
$h(x) = x + \text{sen } x$	0	$1 + \frac{\pi}{2} \approx 2.57$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2} - 1 \approx 3.7$	$2\pi$
Puntos en la gráfica de $h$	(0, 0)	$(\frac{\pi}{2}, 2.57)$	$(\pi, \pi)$	$(\frac{3\pi}{2}, 3.71)$	$(2\pi, 2\pi)$

Al localizar los puntos de la última fila en el plano cartesiano y al unirlos se obtiene el gráfico aproximado de  $h(x)$  como se muestra en la fig. 5(b).

3. Úsese la identidad  $\tan(\alpha + \beta) \equiv \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}$  para demostrar que si  $\alpha = 20^\circ$  y  $\beta = 25^\circ$ , entonces,  $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$ .

### Solución

En primer lugar,  $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 1 + (\tan \alpha + \tan \beta) + \tan \alpha \cdot \tan \beta$  (1).

De otro lado, como  $\alpha + \beta = 45^\circ$  y  $\tan 45^\circ = 1$ , se tiene que  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = 1$ .

Así que,  $\tan \alpha + \tan \beta = 1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta$  (2).

Substituyendo (2) en (1) se obtiene:

$$(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 1 + (1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta) + \tan \alpha \cdot \tan \beta = 2.$$

4. Demuéstrese que:  $\cos(\text{sen}^{-1}x) = \sqrt{1-x^2}$  si  $|x| \leq 1$ .

### Solución

Sea  $y = \text{sen}^{-1}x$ . Luego  $\text{sen } y = x$ .

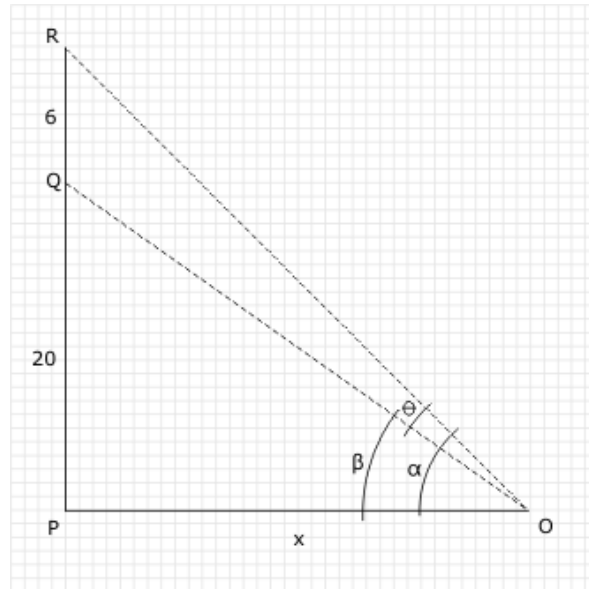
Ahora como  $-1 \leq x \leq 1$ , entonces,  $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ .

En consecuencia, de la identidad  $\text{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$ , y como  $\cos y \geq 0$ , se deduce que  $\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$ .

5. Una valla rectangular de 6 mts. de altura se instala verticalmente en la parte superior de un edificio, con su base inferior a una altura de 20 mts. Si un observador está a una distancia  $x$  del pie del edificio, exprese en función de  $x$  el ángulo subtendido por las rectas que van del ojo del observador a las bases superior e inferior de la valla.

### Solución

La figura adjunta ilustra la situación



Sea  $\theta$ : ángulo subtendido por las visuales.

Denotamos  $\alpha$  la medida del ángulo  $POR$  y por  $\beta$  la medida del ángulo  $POQ$ .

De acuerdo con la figura, se tiene:

$$\theta = \alpha - \beta \quad (1)$$

$$\text{Pero, } \tan \alpha = \frac{26}{x} \Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1} \frac{26}{x} \quad (2)$$

$$\tan \beta = \frac{20}{x} \Leftrightarrow \beta = \tan^{-1} \frac{20}{x} \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1), se obtiene:

$$\theta = \tan^{-1} \frac{26}{x} - \tan^{-1} \frac{20}{x}$$

Mas adelante, usando derivación puede probarse que el ángulo subtendido  $\theta$  es máximo, si el observador se coloca a una distancia  $x = 2\sqrt{130}$  mts. del pie del edificio.