

1.2 FUNCIONES

Una función tiene un **conjunto de partida** (A), un conjunto de llegada (B) y una “regla” de asignación.

La notación $f : A \rightarrow B$ significa:

“ f es una función de A en B ”. A y B son conjuntos **no vacíos**.

f es una función de A en B si satisface:

- i. f es una relación de A en B . Esto es, f es un conjunto de parejas ordenadas cuya primera componente está en A y cuya segunda componente está en B .
- ii. El dominio de f es A . Esto significa que a cada elemento de A le corresponde al menos un elemento de B .
- iii. A cada elemento de A le corresponde a lo sumo uno de B .

El conjunto A se llama DOMINIO de f ; B , CODOMINIO.

Si (x, y) está en f , se dice que y es **la imagen** de x bajo f , y se escribe:

$$y = f(x)$$

Las condiciones ii. y iii. se resumen así: A cada elemento de A le corresponde exactamente una imagen.

En general, x se llama **variable independiente**; y (o $f(x)$) es la **variable dependiente**.

En general, si A es un conjunto de números reales, esto es, $A \subset R$, y

$$f : A \rightarrow R,$$

se dice que f es una **función real de variable real**.

Gran parte de las funciones reales suelen expresarse mediante una expresión algebraica, sin hacer mención de su dominio.

En estos casos, el dominio de f es el conjunto A “mas amplio” de números reales, para los cuales el cálculo de $f(x)$ produce un número real.

Ejemplo:

Sean f, g funciones reales definidas así:

$$f(x) = \frac{x-2}{x+3} \quad ; \quad g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2-9}$$

El cálculo de $f(x)$ da como resultado un número real, excepto en el caso en que $x = -3$ (denominador nulo). En consecuencia, el dominio de f es:

$$D_f = R - \{-3\}$$

También: $D_f = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

Para que $g(x)$ sea un número real, debe tenerse simultáneamente:

$$x^2 - 4 \geq 0 \quad \text{y} \quad x^2 - 9 \neq 0$$

Por tanto, $D_g = (-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup [2, 3) \cup (3, +\infty)$.

De otro modo: $D_g = R - (-2, 2) - \{-3, 3\}$.

1.2.1 Funciones definidas a tramos

Ciertas funciones tienen fórmulas diferentes, según las regiones del dominio.

Ejemplo:

$$h(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ; \quad x < -1 \\ 3 & ; \quad -1 \leq x < 2 \\ 3 + \sqrt{x^2-4} & ; \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Esta función está definida para todo x real. Su dominio (R) está separado en tres (3) tramos: $(-\infty, -1)$, $[-1, 2)$ y $[2, +\infty)$. Véase su gráfica.

1.2.2 Funciones constantes e idénticas

De una función se dice constante si todos los elementos del dominio tienen la misma imagen. Si dicha imagen común es C , se escribe:

$$f(x) = C$$

La gráfica de una función constante es una recta horizontal.

Ejemplo:

Una función que asigna, como imagen, a cada elemento del dominio el mismo elemento, se llama **función idéntica** o **función identidad**:

$$f(x) = x$$

Su gráfica es la recta bisectriz de los cuadrantes primero y tercero. Véase la figura

1.2.3 Ejercicios propuestos

Tomados del texto de Zill y Dewar (páginas 149 y 151)

N° 15

N° 16

N° 17

N° 23

N° 24

N° 25

N° 28

N° 29

N° 32

N° 33

N° 34

N° 43

1.2.4 Gráficas de funciones

En el sistema de coordenadas cartesianas, es posible trazar la gráfica de una función: es el centro de los puntos del plano cartesiano cuyas coordenadas satisfacen la ecuación de la función, $y = f(x)$.

Algunas gráficas tienen puntos en uno o en los dos ejes cartesianos; dichos puntos se llaman interceptos de la función (o de su gráfica) con los ejes.

Algunas funciones tienen características especiales, por lo cual se les da un tratamiento especial. Algunas son: función lineal, función cuadrática, función exponencial, función logarítmica, función trigonométrica, función hiperbólica.

1.2.4.1 La función lineal

La función lineal tiene la forma: $y = f(x) = mx + b$. En esta ecuación, m es la pendiente de la recta, b es la “ordenada en el origen”, ya que el punto $(0, b)$ pertenece a la gráfica de la recta; en efecto:

$$f(0) = b$$

El punto $(0, b)$ es la “intersección de la recta con el eje y ”.

Para determinar la “intersección de la recta con el eje x ”, debe resolverse la ecuación:

$$mx + b = 0$$

Esta ecuación tiene solución únicamente en el caso en que la pendiente m es diferente de cero:

$$x = -\frac{b}{m}$$

En este caso, el punto $\left(-\frac{b}{m}, 0\right)$ es el intercepto de la recta en el eje x .

En las siguientes figuras se observan las gráficas de tres líneas rectas: la primera, con pendiente positiva; la segunda con pendiente negativa, y la tercera, con pendiente nula.

1.2.4.2 La función valor absoluto

La función $f(x) = |x - 3|$ es una variante de la función “valor absoluto”. Su gráfica se compone de la unión de dos tramos de línea recta. Esta función puede ser definida a tramos, así:

Esta función es simétrica con respecto al eje y , pues

$$f(-x) = f(x)$$

para todo x en el dominio de f (\mathbb{R} : el conjunto de los números reales).

A las funciones simétricas con respecto al eje y también se les denomina “funciones impares”.

Existen también funciones simétricas con respecto al origen. Para estas funciones,

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo x en el dominio de f (R).

Un ejemplo de estas funciones, también llamadas “funciones impares” es la función

$$f(x) = x^3$$

cuya gráfica se observa en la figura siguiente.

1.2.5 Operaciones con funciones

Las operaciones aritméticas entre números reales pueden extenderse a funciones reales de variable real. Entre estas pueden efectuarse las operaciones: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación, radicación.

Considérense dos funciones reales f , g con dominios respectivos D_f y D_g .

Sea $D = D_f \cap D_g$.

Si $D \neq \emptyset$; esto es, si las dos funciones tienen elementos comunes en sus dominios, pueden definirse las operaciones mencionadas así:

$$\begin{aligned} (f + g): D &\rightarrow R \\ x &\mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{aligned}$$

Es decir, la función **adición** tiene dominio D , y la imagen de cualquier x en D se obtiene como la suma de las imágenes de x bajo f y bajo g .

De modo similar:

Operación diferencia:

$$(f - g): D \rightarrow R$$
$$x \mapsto (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

Operación multiplicación:

$$(f \cdot g): D \rightarrow R$$
$$x \mapsto (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Operación división:

$$\left(\frac{f}{g}\right): D^* \rightarrow R$$
$$x \mapsto \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

D^* es el conjunto de los elementos de D en los cuales $g(x) \neq 0$. Recuérdese que no existe la división entre **cero**.

En el texto de Zill, sección 3.6, puede verse el siguiente ejemplo:

$$f(x) = x^2 + 4x \quad ; \quad g(x) = x^2 - 9$$

Es claro que $D_f = D_g = R$

$$(f + g)(x) = 2x^2 + 4x - 9$$
$$(f - g)(x) = 4x + 9$$
$$(f \cdot g)(x) = x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 36x$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 9}$$

Nótese que $D = R$. D es el dominio de las funciones $(f + g), (f - g), (f \cdot g)$. En cambio, el dominio de la función corriente $\frac{f}{g}$ es: $R - \{3, -3\}$; 3 y -3 son los puntos en los cuales se anula la función $g(x)$.

En la misma sección del texto de Zill se presenta otro ejemplo:

$$f(x) = x \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x}$$

Es claro que $D_f = R$, mientras $D_g = R_0^+$ (el conjunto de los reales no negativos).

$$D = R \cap R_0^+ = R_0^+$$

Así, R_0^+ es el dominio para las funciones $(f + g), (f - g), (f \cdot g)$. El dominio para $\frac{f}{g}$ es, en cambio, R^+ (el conjunto de los reales positivos).

1.2.6 Composición de funciones

Sean f, g funciones reales de variable real, con dominios respectivos D_f y D_g y rangos respectivos $r(f)$ y $r(g)$. Recuerdese que el **rango** de una función es el conjunto de los valores que puede tomar la función.

Si $r(f) \subset D_g$, entonces existe una función llamada **FUNCIÓN COMPUESTA DE g y f** , denotada $g \circ f$, y definida así:

$$(g \circ f): D_f \rightarrow R \\ x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Ejemplo:

Considérense las funciones:

$$f(x) = x^2 + 2 \quad ; \quad g(x) = \sqrt{x-3}$$

$$D_f = R \quad ; \quad D_g = [3, +\infty) = \{x \in R : x \geq 3\}$$

El rango de f es: $r(f) = [2, +\infty)$.

Para definir $g \circ f$, es preciso restringir el dominio de f , de modo que $f(x) \geq 3$.

Esto exige que: $x^2 + 2 \geq 3$

O sea, $x^2 \geq 1$

Se obtiene así que debe restringirse el dominio de f a:

$$D_f^* = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 1\}$$

Ahora, $g \circ f : D_f^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Luego, $(g \circ f)(x) = g(x^2 + 2)$
 $= \sqrt{x^2 + 2} - 3$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

1.2.7 Ejercicios propuestos

Resuelva los siguientes ejercicios tomados del texto de Zill, páginas 166 y 167.

N° 3

N° 5

N° 6

N° 7

N° 8

N° 11

N° 12

N° 13

N° 17

N° 18

N° 21

N° 23

N° 27

N° 30

N° 31

N° 33

N° 35

N° 37

N° 39

N° 40

N° 45

N° 46

N° 51

N° 53

N° 55

1.2.8 Funciones inversas

Considérese una función real f :

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$$

La función f es **uno a uno** si elementos diferentes (en el dominio) tienen imágenes diferentes. De otro modo:

f es **uno a uno** si:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 + 1$$

Sean: $f(x_1) = f(x_2)$; esto es, $x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$.

Es fácil deducir que $x_1 = x_2$.

Así, la función f es uno a uno.

Por otra parte, la función f es **sobre** si y solo si para todo y en R existe un x en D_f tal que $f(x) = y$.

De otro modo f es sobre si todo elemento en el codominio tiene al menos una preimagen.

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 1$$

Sea $y \in R$. ¿Existe x en R tal que $f(x) = y$? En caso afirmativo, $y = x^3 - 1$.

De aquí se deduce,

$$x = \sqrt[3]{y+1}$$

$$\text{Así, } f(x) = f(\sqrt[3]{y+1}) = y+1-1 = y$$

f es, por tanto, sobre

Si una función es a la vez uno a uno y sobre, se le llama BIYECTIVA.

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 1$$

Esta función, como se ha visto, es biyectiva.

Toda función biyectiva f tiene asociada una función llamada INVERSA y denotada f^{-1} , así:

$$\begin{aligned} f &: A \rightarrow B \\ f^{-1} &: B \rightarrow A \\ f^{-1}(x) = y &\text{ sii } f(y) = x \end{aligned}$$

En el ejemplo que se trae,

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\f(x) &= x^3 - 1 \\f^{-1}(x) &= \sqrt[3]{y+1}\end{aligned}$$

Para las funciones inversas se cumple:

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = a \\(f^{-1} \circ f)(x) &= f^{-1}(f(x)) = x\end{aligned}$$

Es decir, la composición de una función y su inversa, produce la función idéntica.

Ejercicio:

Considérese la función $f(x) = \frac{2}{x^3 + 1}$

¿Cuál es el dominio de f ? Su rango?

Demuéstrese que f es biyectiva y que su inversa es:

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{2-x}{x}}$$

Véase la solución en el texto de Zill (página 170).

Una propiedad interesante de las funciones inversas es que sus gráficas son simétricas entre si con respecto a la recta $y = x$ (bisectriz del primero y el tercer cuadrante). Véase la figura siguiente.

1.2.9 Ejercicios propuestos

Resuélvase los siguientes ejercicios, tomados del texto de Zill, página 173.

N° 22

N° 23

N° 24

N° 27

N° 29

N° 30

N° 32

N° 34

N° 37

N° 38

N° 39

N° 41

N° 44

N° 46

N° 47

N° 48

1.2.10 Ejercicios propuestos

Resuélvase los siguientes ejercicios, tomados del texto de Zill, página 180.

N° 47

N° 48

N° 49

N° 50

N° 53